

Egy hasznos feladatról

Az [1] műben találtuk az alábbi érdekes, tanulságos – és nem utolsósorban hasznos – feladatot és megoldását – 1. ábra.

238. *Given a curve, which is known to be an ellipse, find its centre, the positions and lengths of its principle axes, and its foci.*

Draw any two parallel chords and bisect them at V and V' . Let VV' produced meet the curve at P and P' .

PP' is a diameter, for it bisects parallel chords.

$\therefore C$ the middle point of PP' is the centre.

On PP' as diameter describe a circle meeting the ellipse at Q . $\angle P'QP$ is a rt. $\angle$, and PQ , $P'Q$ are supplemental chords.

$\therefore$ the diameters ACA' , BCB' parallel to $P'Q$ and PQ are conjugate diameters at right angles, i.e. they are the principal axes.

With centre B and radius equal to CA describe a circle cutting AA' at S and S' . $BS = CA = BS'$.

$\therefore S$ and S' are the foci.

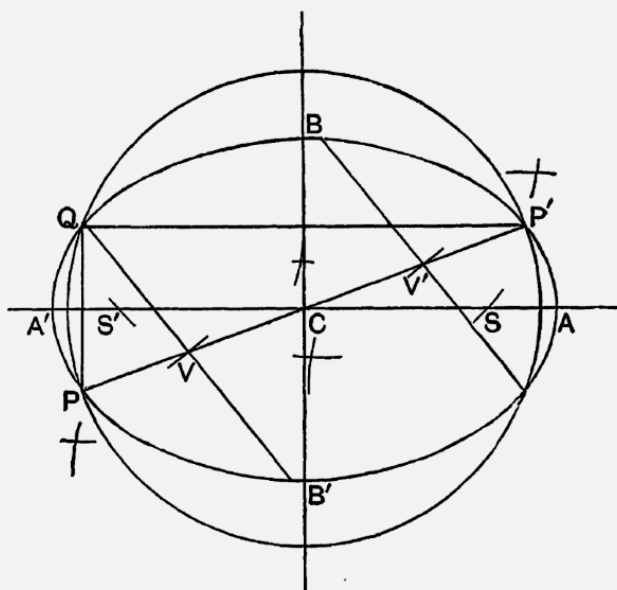


FIG. 142.

1. ábra – forrása: [1]

A feladat

Adott egy görbe, melyről tudjuk, hogy *ellipszis*. Határozzuk meg:

~ a középpontját,

~ a főtengelyek (a kis - és nagytengely) helyzetét és hosszát,

~ a fókuszait!

A megoldás

Ennek előkészítéséhez állítottuk elő a 2. és a 3. ábrát.

3. ábra

derékszögek maradtak. Vagyis ha az ellipszis főtengelyeinek irányát keressük, akkor azt kell elérni, hogy az ellipszis két húrja egymásra merőleges legyen. Ezt úgy érhetjük el, hogy a (pink) E_5E_6 ellipszis - átmérőre (bordó) *Thalész - kört* szerkesztünk, így pl. az $E_5E_7E_6$ szög is derékszög lesz, melynek szárai párhuzamosak az ellipszis főtengelyeivel.

Ezen előkészítés után a megoldás lépései az 1. ábra szerint az alábbiak.

1. Megrajzoljuk az ellipszis két párhuzamos húrját.
2. Meghatározzuk e húrok V és V' szakaszfelező pontjait, majd ezeket összekötve el-metsszük az ellipszist; ekkor megkaptuk a P és a P' pontokat, melyek egy ellipszis-átmérő végpontjai.
3. Az ellipszis C középpontját a PP' átmérő - szakasz felezőjében találjuk.
4. A PP' átmérő - szakaszra kört szerkesztünk, mely az ellipszist a Q pontban metszi. Berajzoljuk a PQ és QP' húrokat. A PQP' szög derékszög.

5. A C középponton keresztül párhuzamost húzunk QP' - tel és QP - vel. Ekkor előállnak az A és A' , valamint a B és B' metszéspontok.

A kapott AA' szakasz a nagytengely és annak hossza, a BB' szakasz a kistengely és annak hossza.

6. A B (vagy B') középpontból CA sugarú körívvel elmetszve az AA' egyenest metszés - pontokként kapjuk az S és S' fókuszpontokat, amint azt az elemi geometriából tudjuk.

Ezzel a *szekesztéses megoldás* befejeződött.

Megjegyzések:

M1. Úgy tűnik, egy fontos szerkesztésre bukkantunk. Emlékeink szerint eddig még nem találkoztuk vele.

M2. A 2. ábra nagyon érzékeny a szerkesztési pontatlanságokra, ezért is kellett géppel megrajzolni. Így legalább szép is lett.

M3. Fentebb említettük az a sugarú kört, melynek x tengely körüli, $\theta = 45^\circ$ szögű forgatása és az eredeti körsíkra való merőleges vetítése eredményezi az a fél nagytengelyű és $b = a \cdot \cos\theta = a / \sqrt{2}$ fél kistengelyű ellipszist. Az idevágó oldalnézeti képet elhagytuk, helytakarékosság miatt. Így az előlnézeti kép nagyobb lehetett.

Az ábrákról más, nem említett adatok is könnyen levezethetők. Így pl. jól látható, hogy $a = 10 \text{ (cm)}$, így fentiek szerint $b = 7,071 \text{ (cm)}$.

M4. Egy a fentivel rokon feladatot már oldottunk meg, *számítással*. Ehhez ld. egy korábbi dolgozatunkat, melynek címe: *Általános helyzetű ellipszis - pálya egyenletének meghatározása fölös számú mérési eredmények alapján*. Ennek is az volt a lényege, hogy tudjuk, hogy a pálya egy ellipszis, melynek keressük a jellemző adatait. A szerkesztés rövidebb. Azonban van itt pár dolog, amit érdemes lehet átvenni.

1. Az itteni feladatban csak annyit kellett tudnunk, hogy a görbe ellipszis. Ahhoz, hogy a szerkesztés jól működjön, fenn kell állnia annak a hallgatónak is, hogy az ellipszis pontos. Ha ez igaz, akkor az ismertetett módon könnyen és gyorsan juthatunk az eredményekhez.

2. Az előbb említett korábbi feladatban az volt a másik lényeges – és szimulált – információ, hogy az ellipszis pontjait mérési eredményekként ismerjük, melyek nyilván hibákkal terheltek. Ott tehát egy "kiegyenlítő" jellegű számítást kellett végezni, sok technikai

nehézséget leküzdve.

3. Ha tudjuk, hogy a fenti szerkesztés alapanyaga – az ellipszis – is csak közelítőleg adott, akkor már nem biztos, hogy az itteniek elegendőek.

Az utóbb mondottakat érdemes lehet átgondolni, mielőtt valaki nekilát a megoldásnak, és előállít valamit, amiről nem állíthatja biztosan, hogy elég jó lesz, megoldásként.

M5. Fentiekben felhasználtunk vagy fél tucat tételt, említés és bizonyítás nélkül.

Ez azt jelenti, hogy az ellipszis felhasznált tulajdonságait tényekként, nem pedig bizonyítandó állításokként kezeltük. Egy ilyen jellemző például azon tulajdonság, miszerint:

az ellipszis párhuzamos húrjainak felezőpontjai egy egyenesre esnek – [2].

Ezért is törekedtünk az általunk elérhető legnagyobb szerkesztési, illetve rajzolósi pontosságra, hogy az ilyen állítások ránézésre – itt: a 2. és 3. ábra szemlélete alapján – elfogadhatóak legyenek. Ez a pontosság elég lehet ahhoz, hogy csökkenjen kételkedésünk, erősödjön bizalmunk az [1] - ben talált megoldás lépéseit illetően. Akinek pedig ez kevés, az kezdheti a szakirodalom – pl. [1], [2], [3] – alapos tanulmányozását.

Források:

[1] – **W. M. Baker:** Algebraic Geometry

A New Treatise on Analytical Conic Sections

London, George Bell & Sons, 1906.

[2] – http://www.math.u-szeged.hu/tagok/kurusa/_site/index.php/teaching/stud-downloadables/category/6-ma-thesis?download=44:az-ellipszisek-jellemzese

[3] – https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_519_04218/ch05s07.html

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2020. 08. 06.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>